Kapitel 3

Ein kurzer Überblick über die Theorie und die Lösungsverfahren der statischen volkswirtschaftlichen Verflechtungsmodelle mit nichtlinearen Materialaufwandsfunktionen

In diesem Kapitel geht es um Fragen der Lösbarkeit und der numerischen Lösung der Probleme des Type (1. 23.). Dabei werden neben einem kurzen Überblick über die Theorie der statischen volkswirtschaftlichen Verflechtungsmodelle mit nichtlinearen Materialaufwandsfunktionen einige Verfahren zur Lösung dieser Modelle dargestellt und hinsichtlich ihrer Voraussetzungen und numerischer Effektivität miteinander verglichen.
Bei der Skizzierung der Theorie wird in der Regel eine Verallgemeinerung der aus der Theorie des „klassischen Leontief-Modells" bekannten Ergebnisse angestrebt.
Die Lösbarkeit des Problems (1. 23.) ist im Wesentlichen davon abhängig, welche Bedingungen man an die Materialaufwandsfunktionen $b: R_+^n \to R_+^n$ stellt. Dementsprechend können dann verschiedene Existenz- und Mehrdeutigkeitsaussagen gewonnen werden, die teilweise beim „klassischen Leontief-Modell" gar nicht entstehen können.
Die behandelten Probleme sind meist mit relativ komplizierter Mathematik verbunden. Um die Darstellung so weit wie möglich leicht verständlich zu halten, werden lediglich einige wenige Aussagen in streng mathematischer Form angeführt. Die meisten werden, wenn möglich, verbalisiert und in den entsprechenden Anhängen in formalisierter Gestalt zusammengefasst.
Ein Schwerpunkt des Kapitels ist die Theorie der „Minimaleigenschaft", die zwar aus der Fachliteratur bekannt ist, aber hier unter wesentlich schwächeren Voraussetzungen begründet wird.
Bei der Darlegung der Verfahren werden parallel zwei Ziele verfolgt. Einerseits sind diese eng mit Fragen der Lösbarkeit der statischen volkswirtschaftlichen Verflechtungsmodelle mit nichtlinearen Materialaufwandsfunktionen verbunden; andererseits dienen sie der numerischen Lösung dieser Probleme.
Schließlich wird kurz über die Anwendung dieser Verfahren zur Lösung einiger konkreter Modelle berichtet.

3. 1. Die Theorie der statischen volkswirtschaftlichen Verflechtungsmodelle mit nichtlinearen Materialaufwandsfunktionen

Es ist aus ökonomischer Sicht nützlich, zu untersuchen, unter welchen Bedingungen im Problem (1. 23.) ein geforderter Endverbrauch realisierbar ist. Es wäre natürlich auch noch vorteilhafter, wenn der geforderte Endverbrauch auf verschiedene Wege realisiert werden könnte, was beim „klassischen Leontief-Modell" nicht möglich ist und zwangsläufig ein Nachteil dieses Modells sein kann. Diese und ähnliche Fragen machen es notwendig, Lösbarkeitsbegriffe einzuführen und (mathematische) Existenz-, Ein-, und Mehrdeutigkeitsaussagen herzuleiten.
Wir wollen daher zunächst festlegen, was wir unter der *Lösbarkeit* des Modells (1. 23.) verstehen. Dabei wird zwischen der *globalen* (*starken)* und *lokalen* (*schwachen*) *Lösbarkeit* unterschieden:

D. 3. 1.
Das Problem (1. 23.) heißt *global* (bzw. *stark*) *lösbar*, wenn für jedes beliebige, nach Wahl aber fixierte $y \in R_+^n$ ein $x \in R_+^n$ existiert, derart dass (1. 23.) erfüllt ist.

D. 3. 2.
Das Problem (1. 23.) heißt *lokal* (bzw. *schwach*) *lösbar*, wenn für ein $y \in R_+^n$ ein $x \in R_+^n$ existiert, derart dass (1. 23.) erfüllt ist.

Das Problem (1. 23.) heißt also global (bzw. stark) lösbar, wenn für jeden sinnvollen Endverbrauchsvektor eine sinnvolle Gesamtproduktion möglich ist. Sollte dies nur für einen bestimmten Endverbrauch möglich sein, nennt man das Problem lokal (bzw. schwach) lösbar.
Mit dieser Begriffsbildung werden einige bekannte Äquivalenzaussagen des statischen volkswirtschaftlichen Verflechtungsmodells mit homogen-linearen Materialaufwandsfunktionen (vgl. hierzu z.B. [56]) verallgemeinert.
Die eingeführten Lösbarkeitsbegriffe (globale und lokale Lösbarkeit) sind offensichtlich im Falle des „Klassischen Leontief-Modells“ identisch.
Obwohl erst im nächsten Abschnitt einige Verfahren zur numerischen Lösung von statischen volkswirtschaftlichen Verflechtungsmodellen mit nichtlinearen Materialaufwandsfunktionen beschrieben werden, soll bereits hier ein Verfahren erwähnt werden. Es handelt sich um eine Variante des *Verfahrens der sukzessiven Approximation (VSA)*, das selbst eine Verallgemeinerung des Verfahrens von Gauß-Seidel zur Lösung linearer Gleichungssystems darstellt. Die einzelnen Varianten unterscheiden sich in der Wahl der Anfangslösung.
Bei der Variante, die hier zur Diskussion steht (*VSA-1*), wird ausgehend vom Endverbrauchsvektor als Anfangslösung die erforderliche Gesamtproduktion iterativ mit beliebiger Genauigkeit nach folgender Vorschrift ermittelt:

(*VSA-1*)
$$\begin{cases} i)\ x^{(0)} := y \\ ii)\ x^{(\upsilon)} := b(x^{(\upsilon-1)}) + y,\ \upsilon \in N \end{cases}$$

Die Diskussion des Verfahrens (*VSA-1*) erfolgt in diesem Abschnitt primär aus der Sicht der Lösbarkeit des Problems (1. 23.) und nur sekundär hinsichtlich seiner numerischen Eigenschaften.
Es stellt sich nämlich heraus (vgl. S. 3. 1.), dass das Verfahren (*VSA-1*) – unter Berücksichtigung gewisser schwacher Bedingungen, die gleich formuliert und diskutiert werden – genau dann konvergiert, wenn das Problem (1. 23.) im Sinne der Definition D. 3. 1. Lösbar ist.
Eine dieser Bedingungen, nämlich die Bedingung (*B. 7.*), fordert, dass die Materialaufwandsfunktion *isoton* ist:

(*B. 7.*)
$$b(x^2) \geq b(x^1),\ \forall x^2, x^1 \in R_+^n : x^2 \geq x^1 \geq 0.$$

Die Isotoniebedingung (*B. 7.*) garantiert, dass eine nach (*VSA-1*) konstruierte Folge monoton wächst (vgl. A9. 1.). Die Isotoniebedingung (*B. 7.*) bedeutet ökonomisch, dass mit nichtfallender Gesamtproduktion keine der erforderlichen Materialaufwendungen absolut abnimmt.
Im Falle

$$b:\ R_+^n \to R_+^n,\ \ b(x^2) \leq b(x^1),\ \forall x^2, x^1 \in R_+^n : x^2 \geq x^1 \geq 0.$$

wäre die Materialaufwandsfunktion *antiton*.

Es sei bemerkt, dass sowohl Isotonie als auch Antitonie das Konstantbleiben der Material-Aufwandsfunktion einschließen und dass eine nichtisotone Materialaufwandsfunktion nicht notwendig antiton ist.
Antitone Materialaufwandsfunktionen wird man in der Realität wohl seltener antreffen. In der Volkswirtschaft scheint die Isotonieannahme eher dem Normalfall zu entsprechen; dagegen ist laut [63] diese Annahme in der Betriebswirtschaft nicht immer gerechtfertigt.
Sind in (1. 23.) die Materialaufwandsfunktionen isoton und stetig, dann lässt sich, wie oben angedeutet, folgende Äquivalenzaussage beweisen:
Das Verfahren (*VSA-1*) ist genau dann konvergent, wenn das Problem (1. 23.) global lösbar ist. Dabei konvergiert die nach (*VSA-1*) konvergierte Folge gegen *eine* Lösung dieses Problems.
Die obige Aussage wurde zuerst von Lahiri [42] für einen Spezialfall bewiesen. Wir haben im folgenden Satz, der wegen seiner Bedeutung mit Beweis angeführt wird, eine Verallgemeinerung seiner Ergebnisse vorgenommen:

S. 3. 1.
Gegeben sei das Problem (1. 23.) mit (*B. 7.*). Es gelte ferner die Bedingung

(*B. 8.*) $$\lim_{\upsilon\to\infty} b(x^{(\upsilon)}) = b\left(\lim_{\upsilon\to\infty} x^{(\upsilon)}\right).$$

Dann gilt:

$$\left\langle \left\{x^{(\upsilon)}\right\},\ \upsilon \in N\cup\{0\}:\ (VSA-1) \text{ ist konvergent.}\right\rangle$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\left\langle (1.\ 23.) \text{ ist global lösbar und } x^{*} := \lim_{\upsilon\to\infty} x^{(\upsilon)} \text{ ist } \textit{eine} \text{ Lösung von (1. 23.)}\right\rangle.$$

Beweis:
$(\Rightarrow)$:
Sei $x^{*} := \lim_{\upsilon\to\infty} x^{(\upsilon)}$. Dann gilt:

(3. 1.)
$$\begin{aligned} x^{(\upsilon+1)} - x^{(\upsilon)} &= b\left(x^{(\upsilon)}\right) + y - x^{(\upsilon)} \\ &= b\left(x^{(\upsilon)}\right) + y - x^{(\upsilon)} + b\left(x^{(\upsilon)}\right) - b\left(x^{(\upsilon)}\right) \\ &= y - f\left(x^{(\upsilon)}\right) \end{aligned}$$

mit $x^{(\upsilon)} - b\left(x^{(\upsilon)}\right) := f\left(x^{(\upsilon)}\right)$.
Da die Folge $\left\{x^{(\upsilon)}\right\},\ \upsilon \in N\cup\{0\}$ konvergiert, folgt $\lim_{\upsilon\to\infty}\left(x^{(\upsilon+1)} - x^{(\upsilon)}\right) = 0.$ Hieraus ergibt sich:

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{\upsilon\to\infty}\left(x^{(\upsilon+1)} - x^{(\upsilon)}\right) \\ &= \lim_{\upsilon\to\infty}(y - f(x^{(\upsilon)})) && (\because\ (3.\ 1)) \\ &= y - \lim_{\upsilon\to\infty} f(x^{(\upsilon)}) \\ &= y - \lim_{\upsilon\to\infty}\left(x^{(\upsilon)} - b(x^{(\upsilon)})\right) \\ &= y - (x^{*} - \lim_{\upsilon\to\infty} b(x^{(\upsilon)}) \end{aligned}$$

$$= y - (x^* - b(\lim_{\upsilon \to \infty} x^{(\upsilon)})) \qquad (\because \ (B.\ 8.))$$
$$= y - (x^* - b(x^*))$$
$$= y - f(x^*).$$

$(\Leftarrow)$:
Sei x^* eine Lösung von (1. 23.):

(3. 2.) $$x^* = b(x^*) + y.$$

Dann gilt:

(3. 3.) $$x^* \geq y$$

und

$$x^{(1)} = b(y) + y \qquad (\because \ (VSA - 1))$$
$$\leq b(x^*) + y \qquad (\because \ (3.\ 3.), (B.\ 7.))$$
$$= x^*.$$

Es gelte die Induktionsannahme

(3. 4.) $$x^{(\upsilon)} \leq x^*.$$

Dann erhält man:

$$x^{(\upsilon+1)} = b(x^{(\upsilon)}) + y \qquad (\because \ (VSA - 1))$$
$$\leq b(x^*) + y \qquad (\because \ (3.\ 4.), (B.\ 7.)$$
(3. 5.) $$= x^* \qquad (\because (3.\ 2.))$$

Damit ist $\{x^{(\upsilon)}\},\ \upsilon \in N \cup \{0\},$ beschränkt unf monoton $\left(\because \ (B.\ 7.)\right)$; sie ist also konvergent. Ihr Grenzwert löst nach Konstruktion das Problem (1. 23.).

q.e.d.

Eine fast triviale Folgerung des Satzes S. 3. 1. Besteht darin, dass das Verfahren *(VSA-1)* die „*beste* " Lösung des Problems (1. 23.) in dem Sinne liefert, dass der gegebene Endverbrau mit der geringsten Gesamtproduktion x realisiert wird.

„Die Minimaleigenschaft" des Verfahrens (*VSA-1*) soll an einem kleinen Beispiel illustriert werden:

$$a_{ij} := \begin{cases} x_j & \text{für} \quad x_j \le \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \text{für} \quad x_j > \frac{1}{3} \end{cases}, \qquad i, j = 1, 2, ..., n;$$

$$y := \left(\frac{1}{9},\ \frac{1}{9} \right)^T .$$

Sowohl $x^1 = \left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3} \right)^T$ als auch $x^2 = \left(\frac{1}{6},\ \frac{1}{6} \right)^T$ lösen dieses Problem. Eine Anwendung des Verfahrens (*VSA-1*) würde jedoch stets zur Lösung x^2 führen.

Der nachfolgende Satz beweist diese wichtige Eigenschaft allgemein:

S. 3. 2.
Gegeben sei das Problem (1. 23.) mit (*B. 7.*). Es gelten die Bedingungen (B. 7.) und (B. 8.). Dann gilt:

$$\left\langle \text{(1. 23.) hat eine mehrdeutige Lösung für ein festes } y \in R_+^n \right\rangle$$

$$\Rightarrow$$

$$\left\langle \lim_{\upsilon \to \infty} x^{(\upsilon)} := x^* \le \bar{x} \ ; \ \bar{x} \text{: eine beliebige Lösung des Problems (1. 23.) für diese feste } y \in R_+^n \right\rangle .$$

Beweis:
Es gilt:

(3. 6.) $$\bar{x} = b(\bar{x}) + y$$

(3. 7.) $$\ge y. \qquad (\because\ b(\bar{x}) \in R_+^n)$$

Wir zeigen nun, dass $\bar{x}$ eine obere Schranke der nach (*VSA-1*) konstruierte Folge ist:

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= b(x) + y \\ &\le b(\bar{x}) + y \qquad (\because\ (3.\ 7.), (B.\ 7.)) \\ &= \bar{x}. \end{aligned}$$

Es gelte die Induktionsannahme

(3. 8.) $$x^{(\upsilon)} \le \bar{x}.$$

Dann gilt:

(3. 9.) $$x^{(\upsilon+1)} = b(x^{(\upsilon)}) + y$$

$$\leq b(\bar{x}) + y \qquad \left(\because\ (3.\ 8.), (B.\ 7.)\right)$$

$$= \bar{x}.$$

Es gilt ferner

$$\lim_{\upsilon\to\infty} x^{(\upsilon)} \leq \lim_{\upsilon\to\infty} \bar{x} \qquad \left(\because\ (3.\ 9.)\right)$$

$$= \bar{x}, \qquad \left(\because\ (S.\ 3.\ 1.)\right)$$

d.h.

$$x^* \leq \bar{x}.$$

q.e.d.

Einen anderen Zugang zur Theorie der „Minimaleigenschaft“ eines statischen volkswirtschaftlichen Verflechtungsmodells mit nichtlinearen Materialaufwandsfunktionen findet man in [10]. Hierzu werden einige Ergebnisse der M – Funktionen und Z – Funktionen sowie die der indifferenten Optimierung (vgl. [95], [96]) verwendet. Während die Aussage des Satzes S. 3. 2. verfahrensgebunden ist, sind die Ergebnisse von Bód methodenunabhängig. Andererseits sind die von Bód geforderten Bedingungen weitaus einschränkender als die des Satzes S. 2. 2.

Das Verfahren der sukzessiven Approximation kann auch mit $x^{(0)} := 0$ (*VSA-2*) bzw. $x^{(0)} := x^+ \in R_+^n$ (*VSA-3*) gestartet werden. Für den Nachweis der Konvergenz benötigt man allerdings die zusätzliche Voraussetzung

$$\exists \text{ ein } x^+ \in R_+^n : f(x^+) \geq y, \quad f(x^+) := x^+ - b(x^+).$$

Es muss also eine Gesamtproduktion existieren, die mindestens den geforderten Endverbrauch erfüllt (Die Einzelheiten werden in *Abschnitt 3. 2.* erörtert.)
Während (*VSA-2*) die „Minimaleigenschaft“ beibehält, besitzt (*VSA-3*) eine „Maximaleigenschaft“. Es liefert also im Falle der Mehrdeutigkeit eine Lösung des Problems (1. 23.), die (komponentenweise) nicht kleiner ist als jede andere Lösung dieses Problems.

Es lassen sich nun zahlreiche Bedingungen formulieren, unter denen das Problem (1. 23.) (ein- oder mehrdeutig) lösbar ist. Diese Bedingungen sind vor allem an die Materialaufwands-Funktion $b : R_+^n \to R_+^n$ zu stellen (vgl. *Anhang 10* für eine Zusammenstellung dieser Bedingungen). Sie sind zwar in vielen Fällen ökonomisch interpretierbar, müssen aber nicht immer eine unmittelbare ökonomische Bedeutung haben. Im *Anhang 11* sind die wichtigsten Existenz-, Ein- und Mehrdeutigkeitsaussagen für das Problem (1. 23.) zusammengestellt worden.
Hier werden die meisten von ihnen in weitgehend verbaler Form angeführt:

(A1): Gegeben sei das Problem (1. 23.) mit isotonen und stetigen Materialaufwandsfunktionen (*B. 7.*) und (*B. 8.*).

Wenn das Problem für einen bestimmten Endverbrauchsvektor lösbar ist, dass ist es auch für jeden (komponentenweise) kleineren Endverbrauchsvektor lösbar. (vgl. S.A9.2.);

(A2): Gegeben sei das Problem (1. 23.) mit isotonen und stetigen Materialaufwandsfunktionen (*B. 7.*) und (*B. 8.*) und unter folgender Voraussetzung:
Erhöht man die Gesamtproduktion, so erhöht sich der damit verbundene Materialaufwand höchstens genauso schnell (*B. 9.*) (vgl. *Anhang 10*).
Wenn das Problem für einen (streng) positiven Endverbrauchsvektor lösbar ist, dann ist es global lösbar (vgl. S.A9.3.);

(A3): Gegeben sei das Problem (1. 23.) mit isotonen und stetigen Materialaufwandsfunktionen (*B. 7.*) und (*B. 8.*) und unter folgender Voraussetzung:
Erhöht man die Gesamtproduktion, so erhöht sich der damit verbundene Materialaufwand höchstens genauso schnell (*B. 9.*) (vgl. *Anhang 10*).
Wenn das Problem für einen (streng) positiven Endverbrauchsvektor lösbar ist, dann ist diese Lösung eindeutig;

(A4): Gegeben sei das Problem (1. 23.) unter der Kontraktionsbedingung (*B. 10.*) (vgl. *Anhang 10*).
(Für einige Normen ist die ökonomische Interpretation von (*B. 10.*) offensichtlich.)
Für die Zeilensummennorm bedeutet (*B. 10.*), dass für alle Gesamtproduktionswerte der Zuwachs des Materialaufwands geringer ist als der Zuwachs der Gesamtproduktion im Zweig mit dem größten Gesamtproduktionszuwachs.
Für die Spaltensummennorm fordert (*B. 10.*), dass für alle Gesamtproduktionswerte der Zuwachs des gesamtgesellschaftlichen Materialaufwands nicht größer ist als der Zuwachs des gesellschaftlichen Gesamtproduktes.
Dann ist das Problem eindeutig global lösbar (vgl. S.A9.5.);

(A5): Gegeben sei das Problem (1. 23.) mit isotonen und stetigen Materialaufwandsfunktionen (*B. 7.*) und (*B. 8.*).
Es möge ferner die Bedingung (*B. 4.*) (vgl. *Abschnitt 2. 4.*) gelten. Ferner sei der größte Eigenwert der Matrix der kleinsten oberen Schranken der Materialaufwandskoeffizienten kleiner als Eins (*B. 11.*) (vgl. *Anhang 10*).
Dann ist das Problem global lösbar (vgl. S.A9.6.);

(A6): Gegeben sei das Problem (1. 23.) mit isotonen und stetigen Materialaufwandsfunktionen (*B. 7.*) und (*B. 8.*).
Es möge ferner die Bedingung (*B. 4.*) (vgl. *Abschnitt 2. 4.*) gelten. Weiter möge der größte Eigenwert der Matrix der kleinsten oberen Schranken der Materialaufwandskoeffizienten kleiner als Eins sein (*B. 11.*) (vgl. *Anhang 10*). Es sei weiter vorausgesetzt, dass bei nichtabnehmender Gesamtproduktion die Koeffizienten des direkten Materialaufwands nicht abnehmen (*B. 12.*) (vgl. *Anhang 10*).
Dann ist das Problem eindeutig global lösbar.

(A7): Gegeben sei das Problem (1. 23.) mit isotonen und stetigen Materialaufwandsfunktionen (*B. 7.*) und (*B. 8.*).
Es möge ferner die Bedingung (*B. 4.*) (vgl. *Abschnitt 2. 4.*) gelten. Es sei weiter vorausgesetzt, dass bei nichtabnehmender Gesamtproduktion die Gesamtlieferung der einzelnen Zweige zur Herstellung einer Produktionseinheit sich nicht erhöht und kleiner als eine Einheit ist. (*B. 13.*) (vgl. *Anhang 10*).

(Es handelt sich hierbei um eine Verallgemeinerung der Bauer-Solow-Bedingung [56]).
Dann ist das Problem eindeutig global lösbar (vgl. S.A9.8.);

(A8) Gegeben sei das Problem (1. 23.) mit isotonen und stetigen Materialaufwandsfunktionen ((*B. 7.*), (*B. 8.*)).
Es möge ferner die Bedingung (*B. 4.*) (vgl. *Abschnitt 2. 4.*) gelten. Es sei weiter folgendes vorausgesetzt:
Mit nichtabnehmender Gesamtproduktion erhöht sich die Gesamtlieferung der einzelnen Zweige zur Herstellung einer Produktionseinheit nicht. Sie ist kleiner als eine Einheit für die Produktionsvektoren, die einen (streng) positiven Endverbrauchsvektor realisieren (*B. 4.*) (vgl. *Anhang 10*).
(Es handelt sich hierbei um eine schwache Version der Bedingung (*B. 13.*)).
Dann ist das Problem eindeutig global lösbar (vgl. S.A9.2.);

(A9) Gegeben sei das Problem (1. 23.) mit isotonen und stetigen Materialaufwandsfunktionen ((*B. 7.*), (*B. 8.*)).
Es möge ferner die Bedingung (*B. 4.*) (vgl. *Abschnitt 2. 4.*) gelten. Es sei weiter folgendes vorausgesetzt:
Mit nichtabnehmender Gesamtproduktion erhöht sich die Gesamtlieferung der einzelnen Zweige zur Herstellung einer Produktionseinheit nicht. Sie ist kleiner als eine Einheit für die Produktionsvektoren, die einen (streng) positiven Endverbrauchsvektor realisieren (*B. 4.*) (vgl. *Anhang 10*).
Wenn das Problem für einen (streng) positiven Endverbrauchsvektor lösbar ist, dann ist es global lösbar (vgl. S.A9.9.);

(A10) Gegeben sei das Problem (1. 23.) unter der Bedingung (*B. 3.*) (vgl. *Abschnitt 2. 4.*).
Die Materialaufwandsfunktionen mögen stetig differenzierbar sein (*B. 15.*) (vgl. *Anhang 10*) und deren Ableitung im Nullpunkt ihren höchsten Wert annehmen (*B. 17.*) (vgl. *Anhang 10*). Es möge ferner kein Materialaufwand entstehen, wenn nichts produziert wird (*B. 16.*) (vgl. *Anhang 10*).
Dann ist das Problem eindeutig global lösbar [64].

(A 11) Gegeben sei das Problem (1. 23.) mit isotonen, stetig differenzierbaren und konkaven Materialaufwandsfunktionen ((*B. 7.*), (*B. 15.*), (*B. 18.*)) (vgl. *Anhang 10*). Es möge kein Materialaufwand entstehen, wenn nichts produziert wird (*B. 16.*) (vgl. *Anhang 10*). Es gebe ferner eine Gesamtproduktion, die dem entsprechenden Materialaufwand unterproportional ist (*B. 19.*) (vgl. *Anhang 10*).
Dann ist das Problem global lösbar (S.A9 enthält diese Implikation).

3. 2. Verfahren zur Lösung von statischen volkswirtschaftlichen Verflechtungsmodellen mit nichtlinearen Materialaufwandsfunktionen

In diesem Abschnitt wird ein kurzer Überblick über die wichtigsten Verfahren zur Lösung statischer volkswirtschaftlicher Verflechtungsmodelle mit nichtlinearen Materialaufwandsfunktionen gegeben.
Diese Verfahren lassen sich grob in zwei Klassen einteilen:

K1: Die Verfahren der sukzessiven Approximation;

K2: Die Gradienten- (oder Newtonähnlichen) Verfahren.

Die *Verfahren der sukzessiven Approximation* basieren auf einer direkten Anwendung des Fixpunktprinzips (vgl. hierzu z.B. {46]).
Das statische volkswirtschaftliche Verflechtungsmodell (1. 23.) wird in der Form

(3. 10.) $$x = b_y(x)$$

gebracht mit

(3. 11.) $$b_y(x) := b(x) + y.$$

Die Gleichung (3. 11.) wird dann über die Folge

(3. 12.) $$x^{(\upsilon)} := g(x^{(\upsilon-1)}), \quad \upsilon \in N,$$

gelöst.
Die allgemeine Vorschrift der Verfahren der sukzessiven Approximation (*VSA*) lautet also:

(*VSA*) $$\begin{cases} i)\ x^{(0)} := x^{ANF} \\ ii)\ x^{(\upsilon)} := b(x^{(\upsilon-1)}) + y,\ \upsilon \in N. \end{cases}$$

Die einzelnen Varianten des Verfahrens unterscheiden sich in der Wahl der Anfangslösung x^{ANF}.

Im *Abschnitt 3. 1.* Wurde bereits im Zusammenhang mit der Frage der Lösbarkeit des Problems (1. 23.) die Variante (*VSA-1*) besprochen, bei der $x^{ANF} := y$ gesetzt wird.
Demgegenüber startet die Variante (*VSA-2*) mit der Näherung $x^{ANF} := 0.$ Es gilt nun folgender Satz:

S. 3. 3.
Gegeben sei das Problem (1. 23.). Es gelten die Bedingungen (*B. 7.*) und (*B. 8.*).
Zur Lösung dieses Problems sei folgendes Iterationsverfahren vorgeschlagen:

(*VSA-2*) $$\begin{cases} i)\ \tilde{x}^{(0)} := x^{ANF} \\ ii)\ \tilde{x}^{(\upsilon)} := b(\tilde{x}^{(\upsilon-1)}) + y,\ \upsilon \in N. \end{cases}$$

Unter der Bedingung

(3. 13.) $\exists \text{ ein } x^+ \in R_+^n : f(x^+) = y, \quad f(x^+) := x^+ - b(x^+)$

gilt:

$$\left\langle \{\tilde{x}^{(\upsilon)}\},\ \upsilon \in N \cup \{0\} :\ (VSA-2) \text{ ist konvergent.} \right\rangle$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\left\langle \text{(1. 23.) ist global lösbar und } \tilde{x}^* := \lim_{\upsilon \to \infty} \tilde{x}^{(\upsilon)} \text{ ist } \textit{eine} \text{ Lösung von (1. 23.)} \right\rangle.$$

B e w e i s
$(\Rightarrow)$:
Analog dem Beweis von S. 3. 1.

$(\Leftarrow)$:
Dieser Teil wird durch zwei Behauptungen bewiesen:

<u>*Behauptung 1*</u>*:*
Es gilt

$$\tilde{x}^{(\upsilon+1)} \geq \tilde{x}^{(\upsilon)} \geq 0, \quad \upsilon \in N \cup \{0\}.$$

Beweis der Behauptung 1 (durch Induktion):

Induktionsanfang:

$$\begin{aligned} \tilde{x}^{(1)} &= b(0) + y && \left(\because\ (VSA-2)\right) \\ &\geq 0 && \left(\because\ b(x),\ y \in R_+^n\right) \\ &= x^{(0)}. \end{aligned}$$

Induktionsschritt:
Mit der Induktionshypothese

$$\tilde{x}^{(\upsilon)} \geq \tilde{x}^{(\upsilon-1)} \geq 0$$

folgt

$$\begin{aligned} \tilde{x}^{(\upsilon+1)} - \tilde{x}^{(\upsilon)} &= b(\tilde{x}^{(\upsilon)}) - b(\tilde{x}^{(\upsilon-1)}) && \left(\because\ (VSA-2)\right) \\ &\geq 0, && \left(\because\ (B.\ 7.)\right) \end{aligned}$$

d.h.

$$\tilde{x}^{(\upsilon+1)} \geq \tilde{x}^{(\upsilon)} \geq 0, \quad \upsilon \in N \cup \{0\}.$$

Behauptung 2:
Es gilt

$$\tilde{x}^{(\upsilon)} \leq x^*, \quad \upsilon \in N \cup \{0\}.$$

Beweis der Behauptung 2 (durch Induktion):

Induktionsanfang:

$$\begin{aligned} \tilde{x}^{(0)} &= 0 \\ &\leq x^+. \end{aligned}$$

Induktionsschritt:
Mit der Induktionshypothese

$$\tilde{x}^{(0)} \leq x^+$$

folgt

$$\begin{aligned} \tilde{x}^{(\upsilon+1)} &= b(\tilde{x}^{(\upsilon)}) + y \\ &\leq b(\tilde{x}^{(\upsilon)}) + f(x^+) && \left(\because \ (3.\ 13.)\right) \\ &= b(\tilde{x}^{(\upsilon)}) + x^+ - b(x^+) && \left(\because \ f(x^+) = x^+ - b(x^+)\right) \\ &\leq x^+. && \left(\because \ (B.\ 7.)\right) \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung 2 bewiesen.

Da eine monoton wachsende nach oben beschränkte Folge konvergiert, ist mit diesen beiden Behauptungen Teil $(\Leftarrow)$ bewiesen.

q.e.d.

Die Bedingung (3. 13.) besagt: Es muss eine Gesamtproduktion möglich sein, für die mindestens der Endverbrauch realisiert wird.

Eine weitere Variante des Verfahrens der sukzessiven Approximation kann mit einem beliebigen nichtnegativen Gesamtproduktionsvektor gestartet werden. Für *diese* Gesamtproduktion muss jedoch gelten, dass sie mindestens den Endverbrauch erfüllt. Es gilt dabei folgender Satz:

S. 3. 4.
Gegeben sei das Problem (1. 23.) mit (*B. 7.*) und (*B. 8.*). Zur Lösung dieses Problems sei folgendes Iterationsverfahren vorgeschlagen:

(*VSA-3*)
$$\begin{cases} i) \ \tilde{\tilde{x}}^{(0)} := x^+ \ \ (x^+ \in R_+^n : f(x^+) \geq y) \\ ii) \ \tilde{\tilde{x}}^{(\upsilon)} := b(\tilde{\tilde{x}}^{(\upsilon-1)}) + y, \ \upsilon \in N. \end{cases}$$

Es gilt:

$$\left\langle \{\overset{\approx}{x}^{(\upsilon)}\},\ \upsilon \in N \cup \{0\}:\ (VSA-3) \text{ ist konvergent.} \right\rangle$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\left\langle (1.\ 23.) \text{ ist global lösbar und } \overset{\approx}{x}^{*} := \lim_{\upsilon \to \infty} \overset{\approx}{x}^{(\upsilon)} \text{ ist } \textit{eine} \text{ Lösung von } (1.\ 23.) \right\rangle.$$

B e w e i s:
$(\Rightarrow)$:
Analog dem Beweis von S. 3. 1.

$(\Leftarrow)$:
Dieser Teil wird durch zwei Behauptungen bewiesen:

Behauptung 1:
Es gilt

$$\overset{\approx}{x}^{(\upsilon+1)} \le \overset{\approx}{x}^{(\upsilon)} \ge 0.$$

Beweis der Behauptung 1 (durch Induktion):

Induktionsanfang:

$$\begin{aligned} \overset{\approx}{x}^{(1)} &= b(x^{+}) + y \\ &\le b(x^{+}) + f(x^{+}) \\ &= b(x^{+}) + x^{+} - b(x^{+}) \\ &= x^{(0)}. \end{aligned}$$

Induktionsschritt:
Mit der Induktionshypothese

$$\overset{\approx}{x}^{(\upsilon)} \le \overset{\approx}{x}^{(\upsilon-1)}$$

folgt

$$\begin{aligned} \overset{\approx}{x}^{(\upsilon+1)} &= b(\tilde{x}^{(\upsilon)}) + y \\ &\le b(\tilde{x}^{(\upsilon-1)}) + y \qquad (\because\ (B.\ 7.)) \\ &= \tilde{x}^{(\upsilon)}. \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung 1 bewiesen.

Behauptung 2:
Es gilt

$$\overset{\approx}{x}^{(\upsilon)} \ge x^{*}, \quad \upsilon \in N \cup \{0\}.$$

Beweis der Behauptung 2 (durch Induktion):

Wir zeigen (indirekt), dass

$$x^+ \geq \tilde{\tilde{x}}^*; \quad \tilde{\tilde{x}}^* = b(\tilde{\tilde{x}}^*) + y$$

gilt:

Induktionsanfang:

Es gelte entgegen der Behauptung:

$$x^+ < x^*.$$

Dann gilt wegen (*B. 7.*)

(3. 14.) $b(x^+) \leq b(\tilde{\tilde{x}}^*)$.

Andererseits gilt wegen $y \leq x^+ - b(x^+)$:

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{x}}^* &= b(\tilde{\tilde{x}}^*) + y \\ &\leq b(\tilde{\tilde{x}}^*) + x^+ - b(x^+) \\ &\leq x^+, \qquad (\because \text{(3. 14.)}) \end{aligned}$$

entgegen der Annahme. Daher die Behauptung.

Induktionsschritt:
Mit der Hypothese

$$\tilde{\tilde{x}}^{(\upsilon)} \geq x^*$$

folgt:

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{x}}^{(\upsilon+1)} &= b(\tilde{\tilde{x}}^{(\upsilon)}) + y \\ &= b(\tilde{\tilde{x}}^{(\upsilon)}) + f(x^*) \\ &= b(\tilde{\tilde{x}}^{(\upsilon)}) + x^* - b(x^*) \\ &\geq x^*. \qquad (\because \text{(3. 15.), (}B.\text{ 7.)}) \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung 2 bewiesen.

Da eine monoton fallende, nach unten beschränkte Folge konvergiert, ist Teil $(\Leftarrow)$ bewiesen.

q.e.d.

Die Bedingung (3. 13.) ist zwar für die Konvergenz der Verfahren (*VSA-2*) und (*VSA-3*) unerlässlich, wird aber beim Verfahren (*VSA-2*) nur für den Nachweis der Beschränktheit der

Folge $\{\tilde{x}^{(\upsilon)}\},\ \upsilon \in N \cup \{0\}$, benötigt. Dagegen braucht man sie beim Verfahren (*VSA-3*) auch für den Nachweis der Monotonie der Folge $\{\approx{x}^{(\upsilon)}\},\ \upsilon \in N \cup \{0\}$.
Durch eine Kombination der Verfahren (*VSA-1*) und (*VSA-3*) bzw. (*VSA-2*) und (*VSA-3*) erhält man für alle Gesamtproduktionen $x \in \left[0,\ x^{+}\right]$ mit $f(x) \geq y$ die *Abschätzungen*:

(3. 16.) $$x^{(\upsilon)} \leq x \leq \approx{x}^{(\upsilon)}, \quad \upsilon \in N \cup \{0\},$$

bzw.

(3. 16.) $$\tilde{x}^{(\upsilon)} \leq x \leq \approx{x}^{(\upsilon)}, \quad \upsilon \in N \cup \{0\}.$$

Die Abschätzungen (3. 16.) bzw. (3. 17.) sind für die praktische Durchführung der Iteration von besonderem Interesse, wenn es im Intervall $[0,\ x^{+}]$ nur eine einzige Gesamtproduktion gibt, die den borgegebenen Endverbrauch realisiert. Dann gilt nämlich:

(3. 18.) $$\lim_{\upsilon\to\infty} x^{(\upsilon)} \leq x \leq \lim_{\upsilon\to\infty} \approx{x}^{(\upsilon)}$$

bzw.

(3. 19.) $$\lim_{\upsilon\to\infty} \tilde{x}^{(\upsilon)} \leq x \leq \lim_{\upsilon\to\infty} \approx{x}^{(\upsilon)}.$$

Im Folgenden werden die Verfahren (*VSA-1*) – (*VSA-3*) modifiziert, um eine Konvergenzbeschleunigung zu erzielen. Es lässt sich nämlich zeigen, dass die modifizierten Verfahren (*MVSA-1*) – (*MVSA-3*) genau dann konvergieren, wenn die Verfahren (*VSA-1*) – (*VSA-3*) konvergieren. Beide haben dann denselben Grenzwert, aber in Bezug auf die Konvergenzgeschwindigkeit sind die Verfahren (*MVSA-1*) – (*MVSA-2*) die besseren. Während die Verfahren der sukzessiven Approximation Gesamtschrittverfahren sind, hat man bei ihren modifizierten Varianten mit Einzelschrittverfahren zu tun.
Es gilt:

S. 3. 5.
Gegeben sei das Problem (1. 23.) mit (*B. 7.*) und (*B. 8.*). Zur Lösung dieses Problems sei folgendes Iterationsverfahren (das *modifizierte Verfahren der sukzessiven Approximation 1,* (*MVSA-1*)) vorgeschlagen:

(*MVSA-1*)
$$\begin{cases} i)\ \mathrm{z}_i^{(0)} := y,\ i = 1,2,...,n \\ ii)\ \mathrm{z}_i^{(\upsilon)} := y_i + b_i(z_i^{(\upsilon)},...,z_{i-1}^{(\upsilon)},z_i^{(\upsilon-1)},...,z_n^{(\upsilon-1)})^T,\ i = 1,2,...,n;\ \upsilon \in N. \end{cases}$$

Dann gilt:

A. Die durch (*MVSA-1*) definierte Folge ist monoton wachsend und konvergent.

B. $z^{(\upsilon)} \geq x^{(\upsilon)}, \quad \upsilon \in N \cup \{0\}.$

C. $\lim_{\upsilon\to\infty} z^{(\upsilon)} = \lim_{\upsilon\to\infty} x^{(\upsilon)}.$

B e w e i s:

A.
Diese Behauptung wird durch zwei Behauptungen bewiesen:

Behauptung 1:
Es gilt

$$z^{(\upsilon+1)} \geq z^{(\upsilon)} \quad \upsilon \in N \cup \{0\}.$$

Beweis der Behauptung 1 (durch Induktion):

Induktionsanfang:

$$\begin{aligned} z_i^{(1)} &= y_i + y_i + b_i(z_i^{(1)},...,z_{i-1}^{(1)},z_i^{(0)},...,z_n^{(0)})^T \\ &\geq y_i \qquad (\because y_i,\ b_i(z) \in R_+^1) \\ &= x_i^{(0)}, \quad i = 1,2,...,n. \end{aligned}$$

Induktionsschritt:

Mit der Induktionshypothese

$$z^{(\upsilon)} \geq z^{(\upsilon-1)}$$

Folgt durch eine zweite Induktion über i:

$(i = 1)$:

$$\begin{aligned} z_1^{(\upsilon+1)} &= y_1 + b_1(z^{(\upsilon)}) \\ &\geq y_1 + b_1(z^{(\upsilon-1)}) \qquad (\because (B.\ 7.)) \\ &= z_1^{(\upsilon)}. \end{aligned}$$

$(i \Rightarrow i+1)$:

$$\begin{aligned} z_{i+1}^{(\upsilon+1)} &= y_{i+1} + b_{i+1}(z_1^{(\upsilon+1)},...,z_i^{(\upsilon+1)},z_i^{(\upsilon)},...,z_n^{(\upsilon)})^T \\ &\geq y_{i+1} + b_{i+1}(z_1^{(\upsilon)},...,z_i^{(\upsilon)},z_{i+1}^{(\upsilon-1)},...,z_n^{(\upsilon-1)})^T \\ &= z_{i+1}^{(\upsilon)}. \qquad (\because z_j^{(\upsilon+1)} \geq z_j^{(\upsilon)},\ j = 1,2,...,i;\ z_j^{(\upsilon)} \geq z_j^{(\upsilon-1)},\ j = 1,2,...,n) \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$z_i^{(\upsilon+1)} \geq z_i^{(\upsilon)}, \quad i = 1,2,...,n\ ,$$

und damit

$$z^{(\upsilon+1)} \geq z^{(\upsilon)}\ .$$

Behauptung 1 ist damit bewiesen.
Behauptung 2:
Sei

$$x^* := \lim_{\upsilon \to \infty} x^{(\upsilon)}$$

(wobei durch S. 3. 1. Die Existenz von x^* gesichert ist).
Dann gilt für alle $\upsilon \in N \cup \{0\}$

$$x^{(\upsilon)} \leq x^*.$$

Beweis der Behauptung 1 (durch Induktion):

Induktionsanfang:

$$z^{(\upsilon)} = y$$
$$\leq x^*.$$

Induktionsschritt:
Mit der Induktionshypothese

$$z^{(\upsilon)} \leq x^*$$

folgt über eine zweite Induktion über i:

$(i = 1)$:

$$z_1^{(\upsilon+1)} = y_1 + b_1(x^{(\upsilon)})$$
$$\leq y_1 + b_1(x^*) \qquad (\because (B.\ 7.))$$
$$= x^*. \qquad (\because f(x^*) = x^* - b(x^*) = y)$$

$(i \Rightarrow i+1)$:

$$z_{i+1}^{(\upsilon+1)} = y_{i+1} + b_{i+1}(z_1^{(\upsilon+1)},...,z_i^{(\upsilon+1)},z_{i+1}^{(\upsilon)},...,z_n^{(\upsilon)})$$

$$\leq y_{i+1} + b_{i+1}(x^*)$$

$$= x_{i+1}^*. \qquad (\because z_j^{(\upsilon+1)} \leq z_j^*,\ j = 1,2,...,i;\ z_j^{(\upsilon)} \leq x_j^*,\ j = 1,2,...,n)$$

Damit folgt $z^{(\upsilon+1)} \leq x^*$ und Behauptung 2 ist bewiesen.

Da eine monoton wachsende, nach oben beschränkte Folge konvergiert, ist mit diesen beiden Behauptungen Teil *A* bewiesen.

B.
Beweis der Behauptung (durch Induktion):

Induktionsanfang:

$$z^{(0)} = y$$

$$\geq y$$
$$= x^{(0)}.$$

Mit der Induktionshypothese

$$z^{(\upsilon)} \geq x^{(\upsilon)}$$

für $i = 1,2,...,n$:

$$z_i^{(\upsilon+1)} = y_i + b_i(z_i^{(\upsilon+1)}...z_{i-1}^{(\upsilon+1)}\ z_i^{(\upsilon)}...z_n^{(\upsilon)})$$

$$\geq y_i + b_i(z_1^{(\upsilon)}...z_n^{(\upsilon)}) \qquad (\because \textit{A. Behauptung } 1)$$

$$= y_i + b_i(z^{(\upsilon)})$$

$$\geq y_i + b_i(x^{(\upsilon)}) \qquad (\because\ x^{(\upsilon)} \leq z^{(\upsilon)})$$

$$= x_i^{(\upsilon+1)}.$$

Damit ist Teil *B* bewiesen.

C.
Aus Teil *B. Behauptung 2* folgt

$$z^{(\upsilon)} = \lim_{\upsilon\to\infty} x^{(\upsilon)}.$$

Damit gilt

$$\lim_{\upsilon\to\infty} z^{(\upsilon)} \leq \lim_{\upsilon\to\infty} x^{(\upsilon)}.$$

Aus Teil *B* folgt

$$\lim_{\upsilon\to\infty} z^{(\upsilon)} \geq \lim_{\upsilon\to\infty} x^{(\upsilon)}.$$

Damit ist Teil *C* bewiesen.
q.e.d.

S. 3. 6.

Gegeben sei das Problem (1. 23.) mit (*B. 7.*) und (*B. 8.*). Es gelte ferner die Bedingung (3. 13.). Zur Lösung dieses Problems sei folgendes Iterationsverfahren (das *modifizierte Verfahren der sukzessiven Approximation 2,* (*MVSA-2*)) vorgeschlagen:

(*MVSA-2*)
$$\begin{cases} i)\ \tilde{z}_i^{(0)} := y,\ i = 1,2,...,n \\ ii)\ \tilde{z}_i^{(\upsilon)} := y_i + b_i(\tilde{z}_1^{(\upsilon)},...,\tilde{z}_{i-1}^{(\upsilon)}\ \tilde{z}_i^{(\upsilon-1)},...,\tilde{z}_n^{(\upsilon-1)})^T,\ i = 1,2,...,n;\ \upsilon \in N. \end{cases}$$

Dann gilt:

A. Die durch (*MVSA-2*) definierte Folge ist monoton wachsend und konvergent.

B. $\tilde{z}^{(\upsilon)} \geq \tilde{x}^{(\upsilon)}, \quad \upsilon \in N \cup \{0\}.$

C. $\lim_{\upsilon \to \infty} \tilde{z}^{(\upsilon)} = \lim_{\upsilon \to \infty} \tilde{x}^{(\upsilon)}.$

B e w e i s:
Analog dem Beweis von S. 3. 5.

S. 3. 6.
Gegeben sei das Problem (1. 23.) mit (*B. 7.*) und (*B. 8.*). Es gelte ferner die Bedingung (3. 13.). Zur Lösung dieses Problems sei folgendes Iterationsverfahren (das *modifizierte Verfahren der sukzessiven Approximation 3,* (*MVSA-3*)) vorgeschlagen:

(*MVSA-3*)
$$\begin{cases} i) \ \approx z_i^{(0)} := x_i^+, \ i = 1,2,...,n \text{ mit } f(x^+) \geq y, \\ ii) \ \approx z_i^{(\upsilon)} := y_i + b_i(\approx z_1^{(\upsilon)},...,\approx z_{i-1}^{(\upsilon)} \approx z_i^{(\upsilon-1)},...,\approx z_n^{(\upsilon-1)})^T, \ i = 1,2,...,n; \ \upsilon \in N. \end{cases}$$

Dann gilt:

A. Die durch (*MVSA-3*) definierte Folge ist monoton fallend und konvergent.

B. $\approx z^{(\upsilon)} \leq \approx x^{(\upsilon)}, \quad \upsilon \in N \cup \{0\}.$

C. $\lim_{\upsilon \to \infty} \approx z^{(\upsilon)} = \lim_{\upsilon \to \infty} \approx x^{(\upsilon)}.$

B e w e i s:
Analog dem Beweis von S. 3. 5.

Die Verfahren (*MVSA-1*), (*MVSA-2*) und (*MVSA-3*) stellen Verallgemeinerungen des Gauß-Seidel-Verfahrens zur Lösung von linearen Gleichungssystemen dar. Es ist leicht zu sehen, dass die Reihenfolge der Nummerierung der Zweige für die Konvergenzgeschwindigkeit der Verfahren (*MVSA*) von entscheidender Bedeutung ist. Im Falle einer sog. „zyklenfreien" Materialaufwandsfunktion lässt sich folgende geeignete „Nummerierung" stets erreichen, dass

$$b_{ij}(x_j) = 0 \text{ für } i \leq j, j = 1,2,...,n,$$

Erreichen. Für diesen Spezialfall kann man die gesuchte Gesamtproduktion nach (*MVSA*) nach einem Schritt erhalten. In [74] wurden weitere Eigenschaften des Verfahrens (3. 12.) aus numerischer Sicht und insbesondere in Verbindung mit der Kontraktionsbedingung (*B. 10.*) aufgezeigt.
Der Kontraktionssatz (vgl. S.A9.5.) hat die angenehme Eigenschaft, dass er eine leicht berechenbare Fehlerabschätzung liefert, die beim υ – Schritt des Iterationsverfahrens die Abweichung vom Grenzwert in Abhängigkeit vom letzten Schritt und der Kontraktions-konstanten λ ausdrückt. Diese lautet:

(3. 20.) $$\| x^{(\upsilon)} - x^* \| \leq \frac{\lambda}{1-\lambda} \| x^{(\upsilon)} - x^{(\upsilon-1)} \|$$

$$\leq \frac{\lambda}{1-\lambda} \| g(x^{(0)}) - x^{(0)} \|, \qquad \upsilon \in N.$$

Die Fehlerabschätzung (3. 20.) kann sich allerdings bei zu großem λ als ziemlich unbrauchbar erweisen.
In [74] wird auch eine Sensitivitätsanalyse des statischen volkswirtschaftlichen Verflechtungsmodells mit kontrahierender Materialaufwandsfunktion vorgenommen. Es wird die Frage beantwortet, was mit der Lösung passiert, wenn man vom Endverbrauchsvektor y auf einen anderen Endverbrauchsvektor $\tilde{y}$ übergeht? Ist die Lösung stabil? Das heißt, ändert sich der Vektor der Gesamtproduktion nur wenig, wenn der Vektor des Endverbrauchs wenig verändert wird? Es stellt sich heraus, dass sich die Lösung bei kleinen Änderungen des Endverbrauchs auch nur wenig ändert. Man kann weiter fragen, was geschieht, wenn man von der kontrahierenden Materialaufwandsfunktion b zu der Materialaufwandsfunktion $\tilde{b}$, übergeht, oder noch allgemeiner von der Iterationsfunktion

$$g(x) := b(x) + y$$

zu

$$\tilde{g}(x) := \tilde{b}(x) + \tilde{y}.$$

Die Abbildung g braucht dabei nicht notwendig kontrahierend zu sein. Wenn wir aber mit der Abbildung $\tilde{g}$ statt g iterieren, so benötigen wir eine Abschätzung für den Fehler, den wir dabei machen. Diese und ähnliche Fragen werden in [74] gestellt und beantwortet. Sie können sich als nützlich erweisen, wenn man z.B. wissen möchte, inwieweit die Anwendung linearer Materialaufwandsfunktionen gerechtfertigt ist.

Zur Illustration der Klasse der Gradienten- (oder Newton-ähnlichen) Verfahren werden wir hier drei Verfahren anführen:

1) Das Newton-Verfahren von Sandberg (*NV*);
2) Das modifizierte Newton-Verfahren (*MNV*);
3) Das Kantorowitsch-Newton-Verfahren (*KNV*).

Die wesentlichen Eigenschaften der genannten Verfahren werden in den nachfolgenden Sätzen beschrieben. Dabei wird auf die Beweisführung verzichtet und auf die entsprechende Literatur verwiesen.

Das Newton-Verfahren von Sandberg wurde bereits im *Abschnitt 3. 1.* Im Zusammenhang mit der Erörterung der Lösbarkeitsbedingungen für das Problem (1. 23.) erwähnt. Es gilt nun der folgende Satz:

S. 3. 8.:
Gegeben sei das Problem (1. 23.). Es gelten die Bedingungen (*B. 3.*), (*B. 15.*) – (*B. 18.*).
Sei ferner

$$\frac{df}{dx}(0) \in M_M,$$

M_M : die Menge der nichtnegativen invertierbaren Matrizen (sog. $M-Matrizen$).

Dann ist das Problem (1. 23.) eindeutig global lösbar und das Newton-Verfahren

(*NV*) $$x^{(\upsilon)} := x^{(\upsilon-1)} - \left(\frac{df}{dx}(x^{(\upsilon-1)})\right)\left(f\left(x^{(\upsilon-1)}\right) - y\right), \quad \upsilon \in N,$$

Konvergiert für jedes $x^{(0)} \in R_+^n$ gegen die Lösung x^* des Problems (1. 23.).
Dabei gilt:

$$x^{(\upsilon)} \geq x^{(\upsilon+1)} \geq x^*, \quad \upsilon \in N.$$

B e w e i s: Vgl. [64].

Der nachfolgende Satz beschreibt eine modifizierte Variante des Newton-Verfahrens:

S. 3. 9.
Gegeben sei das Problem (1. 23.). Es gelten die Bedingungen (*B. 15.*) – (*B. 19.*).
Zur Lösung des Problems (1. 23.) sei folgendes Verfahren (*Modifiziertes Newton-Verfahren, (MNV)*) vorgeschlagen:

(*MNV*) $$\begin{cases} i)\ x^{(0)} := x^0 > 0 :\ b_y(x^0) \leq \lambda x^0, \\ ii)\ x^{(\upsilon)} := b_y(x^{(\upsilon-1)}) + b'(x^0)(x^{(\upsilon)} - x^{(\upsilon-1)}), \quad \upsilon \in N. \end{cases}$$

Dann ist die nach (*MNV*) konstruierte Folge $\{x^{(\upsilon)}\},\ \upsilon \in N \cup \{0\}$, monoton wachsend und konvergiert gegen die eindeutige Lösung x^* der Gleichung (3. 11.).

B e w e i s: Vgl. [81].

Beim Verfahren (*MNV*) kann man als Anfangslösung $x^{(0)} = t_0 x^0$ wählen, wobei $x^0 > 0$ die Bedingung

$$b(x^0) \leq \lambda x^0,\ \lambda \in [0,\ 1],\ y \leq t_0(1-\lambda)x^0,\ t_0 > 0$$

Erfüllen muss.

Die Iterationsvorschrift des Verfahrens (*MNV*) lässt sich folgendermaßen umschreiben:

(3. 21.) $$x^{(\upsilon)} := (E - b'(x^0))^{-1}(b_y(x^{(\upsilon-1)}) - b'(x^0)x^{(\upsilon-1)}),\ \upsilon \in N.$$

Damit hat man die Methode der sukzessiven Approximation auf die Abbildung

(3. 22.) $$g(x) := (E - b'(x^0))^{-1}(b_y(x) - b'(x^0)x)$$

anzuwenden.

Im Zusammenhang mit der Klasse der Gradientenverfahren sei schließlich auf das Verfahren von Newton-Kantorowitsch verwiesen, das im Folgenden Satz beschrieben wird. Der Satz gibt ferner eine Fehlerabschätzung der Iterationsfolge an:

S. 3. 10.
Gegeben sei das Problem (1. 23.). Es gelten die in S. 3. 9. Formulierten Bedingungen.
Zur Lösung des Problems (1. 23.) sei folgendes Iterationsverfahren (*Kantorowitsch-Newton-Verfahren*, (*KNV*)) vorgeschlagen:

(*KNV*)
$$\begin{cases} i) \quad \tilde{x}^{(0)} := x^+ > 0 : b_y(x^+) \le x^+, \\ ii) \quad \tilde{x}^{(\upsilon)} := b_y(\tilde{x}^{(\upsilon-1)} + b'(\tilde{x}^{(\upsilon-1)}))(\tilde{x}^{(\upsilon)} - \tilde{x}^{(\upsilon-1)}), \quad \upsilon \in N. \end{cases}$$

Dann ist die durch (*KNV*) beschriebene Folge $\{\tilde{x}^{(\upsilon)}\}$, $\upsilon \in N$, wohl definiert. Diese Folge konvergiert monoton gegen x^*, welches die Lösung der Gleichung $x = b_y(x)$ darstellt:

(3. 23.) $$x^* \le \ldots \le \tilde{x}^{(\upsilon+1)} \le \ldots \le \tilde{x}^{(1)} \le \tilde{x}^{(0)}.$$

Ist der Operator b zweimal Fréchet-differenzierbar, dann konvergiert $\{\tilde{x}^{(\upsilon)}\}$, $\upsilon \in N$, quadratisch gegen x^*, d.h.

(3. 24.) $$\| \tilde{x}^{(\upsilon+1)} - \tilde{x}^{(\upsilon)} \| \le C \| \tilde{x}^{(\upsilon)} - \tilde{x}^{(\upsilon-1)} \|^2 .$$

Hier ist $C > 0$ eine Konstante.

B e w e i s: Vgl. [81].

Neben den Verfahren der sukzessiven Approximation und den Gradientenverfahren gibt es eine Reihe von speziellen Verfahren. Zum Beispiel lassen sich die Materialaufwands-funktionen vielfach hinreichend genau als Potenzfunktionen darstellen. Betrachtet sei also der Spezialfall:

(3. 25.) $$w_i = \frac{1}{x_1^0}\left(\sum_{j=1}^{n} b_{ij}^0 w_j^{q_{ij}} + y_i \right), \quad i = 1,2,\ldots,n,$$

von (1. 23.).

Hier sind:

(3. 26.) $$w_j := \frac{x_j}{x_j^0}, \quad j = 1,2,\ldots,n,$$

$x_i^0,\ i=1,2,...,n$: die Gesamtproduktion des $i-$ten Zweiges im Basisjahr,

$b_{ij}^0,\ i=1,2,...,n$: die Lieferung des $i-$ten Zweiges an Zweig *j* im Basisjahr,

$q_{ij} \in [0,\ \infty[,\quad i,j=1,2,...,n.$

Im Folgenden wird zur Lösung des Problems (1. 23.) (vgl. hierzu auch [72]) ein spezielles Verfahren entwickelt:

Sei

(3. 27.) $$r_j := \frac{w_j - z_j}{z_j},\quad j=1,2,...,n,$$

wobei $z_j,\ j=1,2,...,n,$ eine ganze Zahl „nahe“ an $w_j,\ j=1,2,...,n,$ ist Es gilt dann nach dem erweiterten Binomialansatz

(3. 28.) $$w_j^{q_{ij}} = z_j^{q_{ij}}(1+r_j)^{q_{ij}}$$

$$= z_j^{q_{ij}}\left(1+q_{ij}r_j+\binom{q_{ij}}{2}r_j^2+...\right),\quad i,j=?1,2,...,n.$$

Die Entwicklung (3. 28.) ist konvergent, falls

$$|r_j|<1,\quad j=1,2,...,n,$$

d.h.

$$\left|\frac{w_j-z_j}{z_j}\right|<1,\ j=1,2,...,n,$$

gilt. Hieraus resultiert für $w_j,\ j=1,2,...,n,$ die Einschließung

(3. 29.) $$0<w_j<2z_j,\quad j=1,2,...,n.$$

Aus (3. 30.) folgt, dass die Nichtkenntnis von $z_j,\ j=1,2,...,n,$ keine ernsthafte Einschränkung des Verfahrens darstellt.
Dieses sollte jedoch eher zu groß als zu klein gewählt werden.
Substituiert man (3. 28.) in (3. 25.) und vernachlässigt die Glieder des mehr als zweiten Grades, so erhält man:

(3. 31.) $$w_i = \frac{1}{x_j^0}\left(\sum_{j=1}^{n} b_{ij}^0 z_j^{q_{ij}}\left(1+q_{ij}r_j+\binom{q_{ij}}{2}r_j^2+y_i\right)\right),\ i=1,2,...,n,$$

bzw.

(3. 32.) $$z_i(r_i+1)x_i^0 - \sum_{j=1}^{n} b_{ij}^0 z_j^{q_{ij}} q_{ij} r_j - \sum_{j=1}^{n} b_{ij}^0 z_j^{q_{ij}} \binom{q_{ij}}{2} r_j^2 = y_i - (z_i x_i^0 - \sum_{j=1}^{n} b_{ij}^0 z_j^{q_{ij}}),$$

$$i = 1,2,...,n\,.$$

Mit

$$P := (p_{ij}), \quad i = 1,2,...,n,$$

$$p_{ij} := \begin{cases} z_j - q_{ij} z_j^{q_{ij}} \cdot \dfrac{b_{ij}^0}{x_j^0} & \text{für } i = j \\ -q_{ij} z_j^{q_{ij}} \cdot \dfrac{b_{ij}^0}{x_j^0} & \text{für } i \neq j \end{cases}$$

$$S := (s_{ij}), \quad i,j = 1,2,...,n,$$

$$t := (t_i), \quad i = 1,2,...,n,$$

$$t_i := y_i - (z_i x_i^0 - \sum_{j=1}^{n} b_{ij}^0 z_j^{q_{ij}}),$$

$$\hat{X}^0 := \begin{pmatrix} x_1^0 & & & & \\ & x_2^0 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \\ & & & & x_n^0 \end{pmatrix},$$

$$r := (r_j), \quad j = 1,2,...,n,$$

$$r^* := (r_j^2), \quad j = 1,2,...,n$$

lässt sich (3. 31.) folgendermaßen darstellen:

$$P\hat{X}^0 r + S\hat{X}^0 r^* = t.$$

Sei nun

(3. 33.) $$r^{(\upsilon)} := r^{(\upsilon-1)} + \Delta r^{(\upsilon-1)}, \quad \upsilon \in N.$$

Dann gilt wegen $r_j^* = r_j^2, \quad j = 1,2,...,n$:

$$r_j^{*(\upsilon)} \approx r_j^{(\upsilon-1)} + 2r_j^{(\upsilon-1)} \Delta r_j^{(\upsilon-1)}, \quad j = 1,2,...,n; \ \upsilon \in N.$$

Dann gilt wegen $r_j^* = r_j^2, \ j = 1,2,...,n,$

$$r_j^{*(\upsilon-1)} \approx r_j^{(\upsilon-1)} + 2r_j^{(\upsilon-1)}\Delta r_j^{(\upsilon-1)}, \quad j = 1,2,...,n;\ \upsilon \in N.$$

Zur Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems (3. 32.) wird nun folgendes Iterationsverfahren (*Spezielles Newton-Verfahren,* (*SNV*)) vorgeschlagen:

(*SNV*) $$P\hat{X}^0(r^{(\upsilon-1)} + \Delta r^{(\upsilon-1)}) + S\hat{X}^0(\tilde{r}^{(\upsilon-1)} + \Delta\bar{r}^{(\upsilon-1)}) = t, \quad \upsilon \in N,$$

mit

(3. 34.) $$r^{(0)} := (P\hat{X}^0)^{-1}t,$$

(3. 35.) $$\tilde{r}^{(\upsilon-1)} := ((r_j^{(\upsilon-1)})^2), \quad j = 1,2,...,n;\ \upsilon \in N,$$

(3. 36.) $$\Delta\bar{r}^{(\upsilon-1)} := (2\bar{r}_j \quad \Delta\bar{r}_j), \quad j = 1,2,...,n;\ \upsilon \in N.$$

Es lässt sich zeigen, dass das Verfahren (*SNV*) mit dem Newton-Verfahren (*NV*)

(3. 37.) $$J(r^{(\upsilon-1)})(r^{(\upsilon)} - r^{(\upsilon-1)}) = -f(r^{(\upsilon-1)}), \quad \upsilon \in N,$$

zur Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems $f(r) = 0$ identisch ist, wobei

$$r^{(\upsilon)} - r^{(\upsilon-1)} = \Delta r^{(\upsilon-1)}, \quad \upsilon \in N,$$

die Matrix

$$\hat{R}^{(\upsilon-1)} := \begin{pmatrix} r_1^0(\upsilon-1) & & & & \\ & r_2^{(\upsilon-1)} & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \\ & & & & r_n^{(\upsilon-1)} \end{pmatrix}, \quad \upsilon \in N,$$

die Jacobi-sche Matrix $J(r^{(\upsilon-1)}),\ \upsilon \in N,$ und

$$t - P\hat{X}^0 r^{(\upsilon-1)} - S\hat{X}^0 r^{(\upsilon-1)} = -f(r^{(\upsilon-1)}), \quad \upsilon \in N,$$

sind.
Daher lassen sich die Eigenschaften des Newton-Verfahrens, einschließlich dessen Konvergenzeigenschaft, auf das Verfahren (*SNV*) übertragen.

3. 3. Einige Schlussfolgerungen

(1) Viele aus der Theorie des *klassischen Leontief-Modells“ bekannten Ergebnisse lassen sich auf den Fall eines statischen volkswirtschaftlichen Verflechtungs-modells mit nichtlinearen Materialaufwandsfunktionen verallgemeinern. Diese und weitere Existenz-, Ein- und Mehrdeutigkeitsaussagen bilden Elemente einer systematischen und abgeschlossenen Theorie der Verflechtungsmodellierung.

(2) Die Nichtlinearität der Materialaufwandsfunktionen kann, Lösbarkeit vorausgesetzt, alternative Lösungen ermöglichen, was aus ökonomischer Sicht sehr wünschenswert ist. Es gibt dabei Verfahren, die stets die „beste“ Lösung liefern: Die geringste Gesamtproduktion, die erforderlich ist, um einen gegebenen Endverbrauch zu realisieren.

(3) Die meisten bekannten Verfahren haben eine doppelte Rolle. Sie dienen sowohl der Gewinnung von verschiedenen qualitativen Aussagen als auch der numerischen Lösung der Verflechtungsmodelle.

(4) Empirische Experimente (siehe *Kapitel 5*) haben bestätigt, dass mit Hilfe der in diesem Kapitel beschriebenen Verfahren und der dazu erstellten Programme praktische Probleme recht effektiv gelöst werden können.

(5) In der Regel entspricht die Effektivität der Verfahren *KNV*, *NV* , *MVSA* , *VSA* hinsichtlich der erforderlichen Rechenzeit der angegebenen Reihenfolge. Für Einzelheiten sei auf *Kapitel 5* verwiesen.